Práctica de Computación- Física I (B y G)

$2^{do.}$ cuatrimestre 2006

ClASE EN EL LABORATORIO DE COMPUTACION-23 de OCTUBRE 2006

1. Introducción sobre el código numérico

En el código *pendulo-simple.m*, se integra en forma numérica la ecuación de movimiento del péndulo dada por la ecuación:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin(\theta) = 0\,, \tag{1}$$

donde θ es el ángulo del hilo con la normal, l es la longitud del hilo y g la aceleración de la gravedad.

La ecuación diferencial Ec. (1) tiene solución analítica sólo para ángulos pequeños, donde $sin(\theta) \sim \theta$.

En este caso la dependencia del ángulo θ con el tiempo es armónica y está dada por: $\theta = \theta_0\, cos(\sqrt{g/l}t)$.

Ahora bien, en el caso en que este problema no tenga solución analítica, se deben reurrir a aproximaciones numéricas.

En este código recurrimos al método de *diferencias finitas*, donde la derivada se aproxima por la resta de la función en dos puntos cercanos: $\frac{df}{dx} \sim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Otra aproximación posible es $\frac{df}{dx} \sim \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$. Ambas aproximaciones son válidas, pero no siempre convenientes. La primera recibe el nombre de *esquema adelantado* y la segunda *esquema centrado.* En este código se aproximó la derivada segunda de θ respecto al tiempo por el método de diferencias finitas en esquema adelantado:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \sim \frac{\theta(t+\Delta t) - 2\theta(t) + \theta(t-\Delta t)}{\Delta t^2}. \tag{2}$$

Para resolver la ecuación diferencial de segundo orden Ec. (1), se necesitan dos condiciones inicales. En este código se pide como parámetros de entrada el ángulo inicial θ_0 y la velocidad inicial $v_0 = l\omega = l\frac{d\theta}{dt}$. Se eligió el esquema de diferencias adelantadas, ya que los datos conocidos corresponden a las condiciones iniciales $\theta(t=0) = \theta_0$ y $\theta(\Delta t) = \theta_0 + v_0\Delta t$ y, por lo tanto, físicamente se desconoce lo que viene *adelante* en el tiempo con $t > \Delta t$.

Entonces la ecuación diferencial Ec. (1) puede sintetizarse algebraicamente:

$$\theta(t+\Delta t) = -\frac{g}{l}\, sin(\theta(t))\Delta t^2 + 2\theta(t) - \theta(t-\Delta t). \tag{3}$$

La ecuación Ec. (3) se resuelve recursivamente partiendo de los datos $\theta(0)$ y $\theta(\Delta t)$, avanzando temporalmente en N pasos iguales de longitud Δt.

2. Guía de ejercicios

Ejercicio 1

1.a. Usando el código *pendulo-simple.m* obtener la posición angular, la velocidad y la energía de la masa para los siguientes casos iniciales:

a. $\theta_0 = 0.15$ y $v_0 = 0$

b. $\theta_0 = 0.15$ y $v_0 = 1$

c. $\theta_0 = 1.00$ y $v_0 = 0$

d. $\theta_0 = 3.14$ y $v_0 = 0$

e. $\theta_0 = 3.14$ y $v_0 = 1$

1.b. Comparar en todos los casos con la solución teórica. Encontrar a partir de qué condiciones iniciales, la solución teórica se aparta en un 10 % de la numérica.

1.c. Analizar la evolución temporal de la energía del sistema. Se conserva la energía total? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2

Introducir una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Repetir para este caso todos los puntos del **Ejercicio 1**. Sugerencia: Una manera de ver que el programa funciona correctamente es chequear que cuando el amortiguamiento es nulo se recuperan las soluciones del **Ejercicio 1**.

Ejercicio 3

Introducir una fuerza armónica forzante del estilo $F = F_0 cos(\omega_0 t)$, con ω_0 muy distinto de $\sqrt{g/l}$. Repetir los pasos del **Ejercicio 1**. Analizar estos casos cuando $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.