

# La característica de Euler y el teorema de Gauss-Bonnet

9 de noviembre de 2006

## Índice

<b>1. Complejos de cadena</b>	<b>2</b>
<b>2. Homología</b>	<b>2</b>
<b>3. La característica de Euler de un complejo</b>	<b>2</b>
<b>4. Mayer-Vietoris</b>	<b>4</b>
4.1. Aplicación al cálculo de característica de Euler . . . . .	4
4.2. Ejemplos . . . . .	5
<b>5. El teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>8</b>
5.1. Enunciado . . . . .	8
5.2. "Frames" y conexión con 1-formas . . . . .	8
5.3. Fórmulas estructurales en general . . . . .	9
5.4. Fórmulas estructurales para $S \subset \mathbb{R}^3$ . . . . .	9
5.5. Demostración de la version local para un triángulo o cuadrado . . . . .	11

# 1. Complejos de cadena

Un sucesion de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

se llama un *complejo* si  $d_n d_{n+1} = 0$  para todo  $n$ .

Si las flechas van al revés, se llama complejo de co-cadenas, se suelen indexar arriba, pero re-indexando  $\tilde{C}^n \equiv C_{-n}$  podemos pasar de los ocmplejos de cadena a los de co-cadena y viceversa.

Ejemplo:  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$

$$C^0 = C^\infty(U), \quad C^1 = C^\infty(U)^3, \quad C^2 = C^\infty(U)^3, \quad C^3 = C^\infty(U)$$

$d_0 : C^0 \rightarrow C^1$  dada por  $d_0(f) = \nabla f$ ,

$d_1 : C^1 \rightarrow C^2$  dada por  $d_1(F) = \nabla \times F$ ,

$d_2 : C^2 \rightarrow C^3$  dada por  $d_2(G) = \nabla \cdot F$ . (Y el resto de los espacios vectoriales y transf. igual a cero.)

Sabemos que  $\nabla \times (\nabla f) \equiv 0$  y  $\nabla \cdot (\nabla \times F) \equiv 0$ , por lo tanto es un complejo.

# 2. Homología

Si

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es un complejo, la condición  $d_{n-1} d_n = 0$  nos dice exactamente  $\text{Im} d_n \subseteq \text{Ker} d_{n-1}$ .

escribiremos  $d$  por  $d_n$ , y  $d^2 = 0$  en vez de  $d_{n-1} d_n = 0$ .

Si buscamos elementos  $\omega_n$  tales que  $d\omega_n = 0$ , segur resolvemos esto poniendo  $\omega_n = d\eta_{n+1}$ . Pero, hay otros? O de otra manera, si queremos ver que  $\omega = d\eta$ , es necesario que  $\omega$  satisfaga  $d\omega = 0$ . Pero, será suficiente? Se define, para un complejo  $C$ , su homología en grado  $n$  como

$$H_n(C) = \text{Ker}(d_{n-1}) / \text{Im}(d_n)$$

La cohomologia de De Rham es la homología del complejo (de cocadenas) de las formas diferenciales con el diferencial exterior.  $H_{dR}^n(M) = n$ -formas cerradas /  $n$ -formas exactas =  $\text{Ker}(d : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}) / \text{Im}(d : \Omega^{n-1} \rightarrow \Omega^n)$ .

La condición  $d_{n+1} d_n = 0$

# 3. La característica de Euler de un complejo

Sea

$$C = \cdots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

un complejo de dimension total finita. Se define

$$\chi(C) = \sum_n (-1)^n \dim C_n$$

**Teorema 3.1.** Sea  $C$  un complejo de dimension finita, entonces

$$\chi(C) = \chi(H(C))$$

**Ejemplo 3.2.** El complejo mas corto posible, que no sea concentrado en un unico lugar, es un morfismo  $f : X \rightarrow Y$ . Este teorema dice

$$\dim X - \dim Y = \dim \text{Ker } f - \dim Y/\text{Im}(f).$$

En efecto, todos sabemos el teorema de la dimension que nos dice

$$\dim X = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f,$$

por lo tanto

$$\dim X - \dim Y = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f - \dim Y = \dim \text{Ker } f - \dim(Y/\text{Im}(f))$$

*Demostración.* (del teo) En general, por induccion en el largo del complejo, si empieza en lugar dado:

$$C : 0 \rightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \rightarrow C_{n+1} \rightarrow \dots$$

podemos considerar el complejo

$$\tilde{C} : 0 \rightarrow 0 \rightarrow C_n/\text{Im}(d_{n-1}) \rightarrow C_{n+1} \rightarrow \dots$$

tiene largo mas chico, luego

$$\chi \tilde{C} = \chi H(\tilde{C}).$$

La homologia de  $\tilde{C}$  es la misma que la de  $C$ , salvo en lugar  $n - 1$ . Tenemos

$$\chi H(\tilde{C}) = \chi H(C) - (-1)^{n-1} H_{n-1}(C) = \chi H(C) - (-1)^{n-1} \dim \text{Ker}(d_{n-1})$$

Por otra parte,

$$\chi \tilde{C} = \chi C - (-1)^{n-1} \dim C_{n-1} - (-1)^n \dim \text{Im}(d_{n-1})$$

y por hipotesis inductiva

$$\chi \tilde{C} = \chi H(\tilde{C}),$$

luego, bastaria probar la igualdad

$$(-1)^{n-1} \text{Ker}(d_{n-1}) = (-1)^{n-1} \dim C_{n-1} + (-1)^n \dim \text{Im}(d_{n-1})$$

o, quitando el  $(-1)^{n-1}$ :

$$\text{Ker}(d_{n-1}) = \dim C_{n-1} - \dim \text{Im}(d_{n-1})$$

que es cierta, de nuevo por el teorema de la dimension.  $\square$

**Corolario 3.3.** Sea  $C$  un complejo exacto, entonces su caracteristica de Euler es cero.

Si  $C$  es un complejo de dimension no necesariamente finita, no acotado, pero cuya homologia sea de dimension total finita, podemos definir

$$\chi C \equiv \chi H(C).$$

**Corolario 3.4.** Si  $C^1$  y  $C^2$  son complejos con misma homologia, entonces  $\chi C^1 = \chi C^2$ .

**Definición 3.5.** Si  $X$  es un espacio topologico tal que  $\dim H_*(X, k)$  es finita, entonces  $\chi(X) \equiv \chi(H_*(X, k))$ .

**Ejemplo 3.6.** La caracteristica de Euler de un intervalo  $I$  es 1, pues  $H^0$  tiene dimension uno y el resto cero. Lo mismo para cualquier espacio contractil, por ejemplo el disco  $D^2$ .

**Observación 3.7.** De manera equivalente, se puede definir  $\chi(X)$  como  $\chi$  de cualquier complejo que calcule la homologia de  $X$ . Por ejemplo,  $M$  es una variedad, entonces  $\chi M = \chi(H_*(M, k)) = \chi(H_{dR}^*(M))$ .

## 4. Mayer-Vietoris

**Teorema 4.1.** Sea  $M$  un espacio topologico (o variedad diferfenciable),  $A$  y  $B$  dos abiertos tales que  $M = A \cup B$ , entonces existe una sucesion exacta larga para su homologia singular,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n A \oplus H_n B \rightarrow H_n M \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H_1 M \rightarrow H_0(A \cap B) \rightarrow H_0 A \oplus H_0 B \rightarrow H_0 M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y tambien para su cohomologia de De Rham:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(M) \rightarrow H_{dR}^0 A \oplus H_{dR}^0 B \rightarrow H_{dR}^0(A \cap B) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^n(M) \rightarrow H_{dR}^n A \oplus H_{dR}^n B \rightarrow H_{dR}^n(A \cap B) \rightarrow H_{n+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

**Corolario 4.2.** Sea  $M = A \cup B$  una union de dos abiertos. Entonces  $\chi M = \chi A + \chi B - \chi A \cap B$ .

### 4.1. Aplicación al cálculo de característica de Euler

La caracteristica de Euler de la union disjunta es la suma.

**Ejemplo 4.3.** La caracteristica de Euler de  $S^1$  es cero. Lo escribimos como union de dos intervalos, cuya interseccion es dos intervalos, entonces tenemos  $\chi S^2 = 1 + 1 - 2 = 0$ .

**Ejemplo 4.4.** La caracteristica de Euler de un cilindro es cero, pues es homotopicamente equivalente a  $S^1$ .

**Corolario 4.5.** Si  $X$  es un espacio topologico triangulado, se puede definir  $\chi X$  como la suma alternada de la cantidad de simplices de cada dimension.

Hay dos maneras de ver esto:

1. En el caso de una superficie, como un triangulo es contractil, y un lado es contractil, y un punto tambien, vemos que basta chequear que la caracteristica de Euler de estos objetos se puede calcular a traves de esta suma alternada.

En un punto, la caracteristica de Euler es uno.

En un segmento, la caracteristica de Euler es uno, y un segmento tiene 1 simple de dimension 1 (el segmento) y dos simples de dimension 0 (sus extremos), asi que  $-1 + 2 = 1$  da el resultado correcto.

Un triangulo tiene un simple de dimension 2 (el triangulo), 3 lados, y tres vertices, luego  $1 - 3 + 3 = 1$  de nuevo da el resultado correcto!.

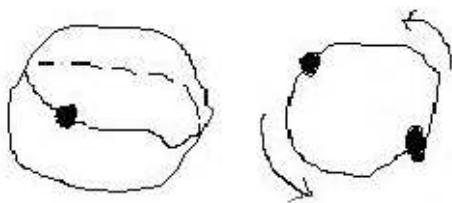
2. La otra manera es usar un teorema que dice que la homología se puede calcular con un complejo de cadenas, en el que en cada lugar (grado) tiene un espacio vectorial de dimension igual a la cantidad de simples de la dimension igual a ese grado, que uno obtuvo por triangulacion.

Una manera de demostrar ese teorema es inductivamente por la cantidad de simples en la triangulacion, usando Mayer-Vietoris...

**Observación 4.6.** Vemos que no hace falta "triangular", podriamos "cuadrangular", o simplemente usar Mayer-Vietoris.

## 4.2. Ejemplos

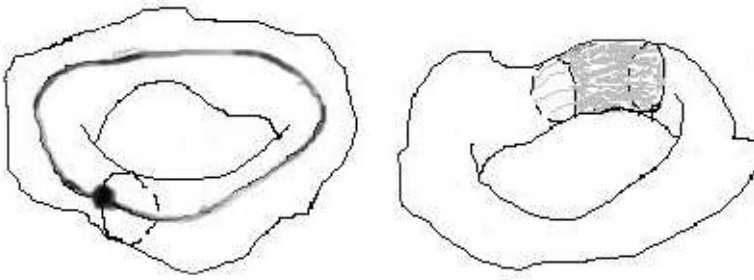
**Ejemplo 4.7.** La esfera: el ecuador con un unico punto en el, y el hemisferio norte y sur da  $\chi S^2 = 2 - 1 + 1 = 2$ . Otra manera es ver a la esfera pegando el hemisferio norte con el sur (dos discos, cada uno tiene caracteristica uno) y la interseccion es una banda alrededor del ecuador (caracteristica cero), luego  $1 + 1 - 0 = 2$ .



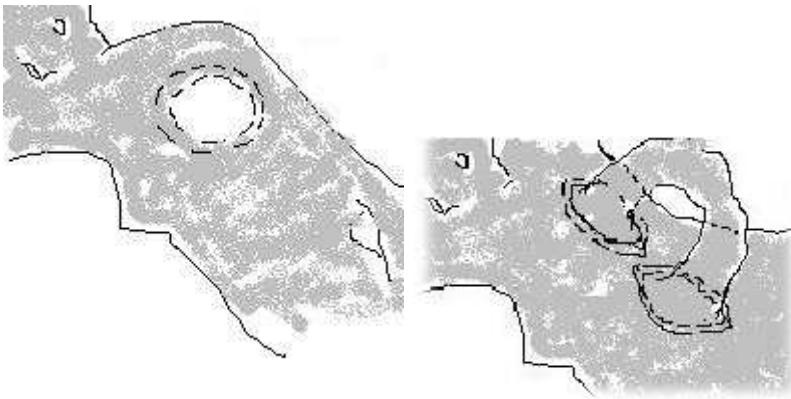
### Ejemplo 4.8.

El plano proyectivo, tiene el borde con un unico punto y un unico hemisferio, luego  $\chi \mathbb{R}P^2 = 1 - 1 + 1 = 1$

**Ejemplo 4.9.** El toro: dos ecuadores, un unico punto, un unico cuadrado, da  $\chi T^2 = 1 - 2 + 1 = 0$ . O bien, usando Mayer Vietoris, unimos dos cilindros (caracteristica cero) que se intersecan en un cilindro (caracteristica cero) luego  $2 \times 0 - 0 = 0$ .



**Ejemplo 4.10.** Si a  $M$  le quitamos un círculo, la característica de Euler disminuye en uno. En efecto, si  $M'$  es  $M$  menos el círculo, sea  $A$  un círculo un poquito mas grande, de esta manera  $A \cup M' = M$  y  $A \cap M'$  es un anillo, que es homotopico a  $S^1$ , cuya característica de Euler es cero. Tenemos  $\chi M = \chi M' + \chi A$ , luego  $\chi M' = \chi M - 1$ . Si hubieramos hecho una triangulación, podriamos considerar que ese círculo es parte de la triangulación, suando sumamos los vertices y los lados da lo mismo, pero cuando sumamos los triangulos, nos falta uno.



**Ejemplo 4.11.**

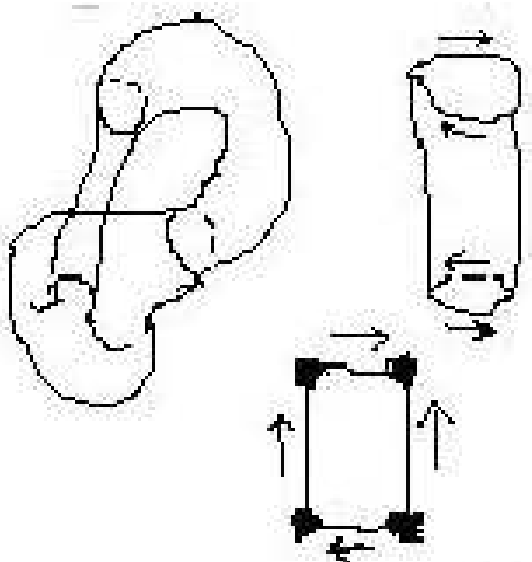
Si a  $M$  le agregamos una manija y llamamos  $\widetilde{M}$  a lo que resulta, la característica de Euler disminuye en dos:  $\chi \widetilde{M} = \chi M'' + \chi C^2 - 2\chi C^2 = \chi M - 2$ .

**Ejemplo 4.12.** Si a  $M$  le agregamos un cross-cap, la característica disminuye en 1. El cross-cup lo pegamos como en la figura:



Es decir, le hacemos agujeros como discos, y los unimos por un tubo cilíndrico. La característica de la superficie final es la de  $M$  menos un disco, mas la de un cross-cap menos un disco, + 2 veces la del cilindro =  $\chi M - 1 + \chi \mathbb{R}P^2 - 1 + 2\chi(cil) = \chi M - 1 + 1 - 1 + 2 \times 0 = \chi M - 1$ .

**Ejemplo 4.13.** La botella de Klein la describimos como un cuadrado donde identificamos los lados paralelos. Un par como en el cilindro, y el otro par, con la orientación al revés del toro. La cantidad de vértices, lados y cuadrados es independiente de la orientación... da lo mismo que el toro:  $0 = 1(\text{cuadrado}) - 2(\text{lados}) + 1(\text{punto})$ .



## 5. El teorema de Gauss-Bonnet

### 5.1. Enunciado

Version global:

**Teorema 5.1.** *S una superficie orientable y orientada, compacta sin borde, entonces*

$$\int_S d^2x \sqrt{h} R(h) = 2\pi \chi(S)$$

**Ejemplo 5.2.** Tomamos una esfera de radio uno, entonces su curvatura es constantemente uno, la integral da el área, que es  $4\pi$ , por lo tanto la característica de Euler de la esfera es 2.

Version local:

**Teorema 5.3.** *S una superficie orientable y orientada, con borde, entonces*

$$\int_S d^2x \sqrt{h} R(h) + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi \chi(S)$$

donde  $k_g$  es la curvatura geodésica (ver luego).

### 5.2. "Frames" y conexión con 1-formas

En vez de coordenadas  $x^\mu$  y campos vectoriales  $\partial_\mu$  tomamos, en un abierto, campos  $E_1, \dots, E_n$  tales que  $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ . La base dual da 1-formas que las llamamos  $\theta_i$ .

Dada la conexión de Levi-Civita (o cualquier conexión..)  $\nabla$ , y un frame  $E_1, \dots, E_n$ , se definen 1-formas asociadas  $\omega_{ij}$  por la fórmula:

$$\nabla_X E_i = \sum_k \omega_{ik}(X) E_k$$

o bien, en el caso de conexión de Levi-Civita:

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle$$

Son  $n^2$  1-formas, pero en realidad hay a lo sumo  $n(n-1)/2$  pues hay relaciones:  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ , dado que si la conexión es de Levi-Civita

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

y como  $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$  entonces

$$0 = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_X E_j \rangle$$



### 5.3. Fórmulas estructurales en general

Para el diferencial exterior, valen las fórmulas

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

*Demostración.* (Cartan) Por ejemplo las primeras: la manera intrínseca de definir el diferencial exterior es

$$d\theta_i(X, Y) = X\theta_i(Y) - Y\theta_i(X) - \theta_i[X, Y]$$

Podemos evaluar esta expresión en  $(E_j, E_k)$  y obtenemos

$$d\theta_i(E_j, E_k) = E_j\theta_i(E_k) - E_k\theta_i(E_j) - \theta_i[E_j, E_k]$$

Como  $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$  (es la base dual), esas evaluaciones dan funciones constantes, al derivarlas con  $E_k$  dan cero, por lo tanto

$$d\theta_i(E_j, E_k) = -\theta_i[E_j, E_k]\theta_i[E_k, E_j]$$

Por otra parte, si calculamos

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\ell=1}^n \omega_{i\ell} \wedge \theta_\ell \right) (E_j, E_k) &= \sum_{\ell=1}^n \omega_{i\ell}(E_j)\theta_\ell(E_k) - \sum_{\ell=1}^n \omega_{i\ell}(E_k)\theta_\ell(E_j) \\ &= \omega_{ik}(E_j) - \omega_{ij}(E_k) \\ &= \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle - \langle \nabla_{E_k} E_i, E_j \rangle \\ &= -\langle \nabla_{E_j} E_k, E_i \rangle + \langle \nabla_{E_k} E_j, E_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_k} E_j - \nabla_{E_j} E_k, E_i \rangle \\ &= \langle [E_k, E_j], E_i \rangle \\ &= \theta_i[E_k, E_j] \end{aligned}$$

(hemos usado que la conexión no tiene torsión:  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ )

Para  $d\omega_{ij}$  parecido..

□

### 5.4. Fórmulas estructurales para $S \subset \mathbb{R}^3$

Nos concentraremos en el caso  $S$  una superficie embebida en  $\mathbb{R}^3$ , orientable y orientada, donde ponemos la métrica usual plana en  $\mathbb{R}^3$  y la métrica inducida en la superficie.

Tomamos un Frame tal que  $E_1$  y  $E_2$  sean tangentes a  $S$  y  $E_3$  es un vector normal (el vector normal  $E_3$  lo podemos hacer globalmente en la superficie si es que es orientable). Tomamos  $E_1, E_2, E_3$  base orientada.

Para vectores tangentes a  $S$  tenemos un endomorfismo

$$X \mapsto (\nabla_X N_3)^S =$$

Escrito en términos de  $\omega_{ij}$  es:

$$X \mapsto (\nabla_X N_3)^S = \langle \nabla_X N_3, E_1 \rangle E_1 + \langle \nabla_X N_3, E_2 \rangle E_2 = \omega_{13}(X)E_1 + \omega_{23}(X)E_2$$

Se define la curvatura de Gauss  $K = \det S$  (y la curvatura media, que no usaremos, por  $H = \frac{1}{2}\text{tr}S$ ).

Si calculamos el determinante de este endomorfismo en la base  $E_1, E_2$ , tenemos

$$E_1 \mapsto (\nabla_{E_1} N_3)^S = \omega_{13}(E_1)E_1 + \omega_{23}(E_1)E_2$$

$$E_2 \mapsto (\nabla_{E_2} N_3)^S = \omega_{13}(E_2)E_1 + \omega_{23}(E_2)E_2$$

y por lo tanto,

$$K = \det \begin{pmatrix} \omega_{13}(E_1) & \omega_{23}(E_1) \\ \omega_{13}(E_2) & \omega_{23}(E_2) \end{pmatrix} = \omega_{13} \wedge \omega_{23}(E_1, E_2)$$

**Lema 5.4.**  $K = R_S$ , el escalar de Ricci de  $S$ .

*Demostración.* La conexión en  $S$  esta definida por

$$\nabla_X^S Y = (\nabla_X Y)^S = \langle \nabla_X Y, E_1 \rangle E_1 + \langle \nabla_X Y, E_2 \rangle E_2$$

El tensor de curvatura en  $S$  se calcula como

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Si calculamos  $\omega_{13}(E_1)\omega_{23}(E_2) - \omega_{13}(E_2)\omega_{23}(E_1)$  empezaran a aparecer formulas con als derivadas covariantes... paciencia y perseverancia.. y surge  $R$ .  $\square$

Ahora calculemos diferenciales en  $M$ . Notar que el elemento de área " $d^2x\sqrt{h}$ " es  $\theta_1 \wedge \theta_2$ .

**Lema 5.5.**

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$$

*Demostración.* Usamos la formula

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \omega_{11} \wedge \omega_{12} + \omega_{12} \wedge \omega_{22} + \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\ &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\ &= -\omega_{13} \wedge \omega_{23} \end{aligned}$$

Ahora aplicamos  $d\omega_{12}(E_1, E_2)$  y obtenemos

$$d\omega_{12}(E_1, E_2) = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}(E_1, E_2) = -K$$

por otra parte  $d\omega_{12}$  debe ser un múltiplo de  $\theta_1 \wedge \theta_2$  pues este es el elemento de area, y como  $\theta_1 \wedge \theta_2(E_1, E_2) = 1$  se sigue que  $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$ .  $\square$

## 5.5. Demostración de la version local para un triángulo o cuadrado

Por la fórmula de  $K$ , mas el teorema de Stokes,

$$\iint_S \sqrt{h} d^2 x K = - \iint_S d\omega_{12} = - \int_{\partial M} \omega_{12}$$

Consideremos ahora la función ángulo con respecto al frame, es decir,  $\phi$  definida por  $c'(t) = |c'(t)|(\cos \phi(t)E_1 + \sin \phi(t)E_2)$ .

**Lema 5.6.** *Sea  $c$  una curva recorrida a velocidad constante, entonces*

$$k_g(c(t)) = \phi'(t) + \omega_{12}(c'(t))$$

Primero, habria que definir  $k_g$ , la curvatura geodésica...

Si  $c(t)$  es una curva tal que  $\|c'(t)\| = \text{cte.}$ , entonces  $\langle c''(t), c'(t) \rangle = 0$ , es decir, la aceleración es perpendicular a la velocidad.

En principio, la aceleración es un vector de la forma  $c''(t) = a_1(t)E_1 + a_2(t)E_2 + a_3E_3$ , si lo descomponemos en una componente tangente a  $S$  y otra normal, la parte tangente será  $a_1(t)E_1 + a_2(t)E_2$ . La curvatura geodésica, en módulo, es igual al módulo de este vector. Para determinar el signo hacemos lo siguiente:

Supongamos por comodidad que  $|c'| = 1$ . Podemos escribir  $c'(t) = \cos \phi(t)E_1 + \sin \phi(t)E_2$ . Existe un único vector  $J(c')$ , perpendicular a  $c'$  contenido en el tangente a  $S$  y tal que  $c', J(c'), E_3$  sea una base orientada. Este vector, de hecho es

$$J(c'(t)) = -\sin \phi(t)E_1 + \cos \phi(t)E_2$$

(es perpendicular a  $c'$  y tangente a la superficie.) Por definición,

$$c''(t) = k_g J(c') + a_3(t)E_3$$

En otras palabras,

$$k_g(c(t)) = \langle c''(t), J(c'(t)) \rangle$$

(si es que  $c'$  esta recorrida a velocidad constante 1).

*Demostración.* (del lema) La función ángulo esta definida por

$$c'(t) = \cos \phi E_1 + \sin \phi E_2$$

luego

$$c''(t) = \phi'(-\sin \phi E_1 + \cos \phi E_2) + \cos \phi \nabla_{c'} E_1 + \sin \phi \nabla_{c'} E_2$$

y por otra parte,

$$J(c') = -\sin \phi E_1 + \cos \phi E_2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} k_g &= \langle c''(t), J(c'(t)) \rangle \\ &= \langle \phi'(-\sin \phi E_1 + \cos \phi E_2) + \cos \phi \nabla_{c'} E_1 + \sin \phi \nabla_{c'} E_2, -\sin \phi E_1 + \cos \phi E_2 \rangle \\ &= \phi' + \langle \cos \phi \nabla_{c'} E_1 + \sin \phi \nabla_{c'} E_2, -\sin \phi E_1 + \cos \phi E_2 \rangle \\ &= \phi' + \cos^2 \phi \langle \nabla_{c'} E_1, E_2 \rangle + \sin^2 \phi \langle \nabla_{c'} E_2, E_1 \rangle \\ &= \phi' + \langle \nabla_{c'} E_1, E_2 \rangle \\ &= \phi' + \omega_{12}(c') \end{aligned}$$

□

**Corolario 5.7.** Sea  $c : [a, b] \rightarrow S$  una curva (diferenciable), entonces

$$\int_C k_g ds = \phi(b) - \phi(a) + \int_C \omega_{12}$$

**Corolario 5.8.**

$$\iint_S d^2x \sqrt{h} R + \int_{\partial S} k_g ds = \text{angulo recorrido en el borde}$$

**Dos ejemplos límite:**

Consideramos el disco plano. La curvatura es cero, y el ángulo recorrido es  $form - e\pi$ , y esto nos da  $2\pi$  veces la característica de Euler del disco, que es 1.



Como otro extremo, consideramos la esfera  $S^2$  de radio 1, tomamos  $S =$  el hemisferio norte, su borde es el ecuador. Como el ecuador es una geodésica, su curvatura geodésica es cero, por lo tanto la integral  $\int_{\partial S} k_g ds = 0$ . Pero como la curvatura es constante ( $=1$ ), el término  $\iint_S d^2x \sqrt{h} R$  da el área del hemisferio norte, que es la mitad del área de la esfera, es decir,  $\frac{1}{2}4\pi = 2\pi$ , igual que antes.

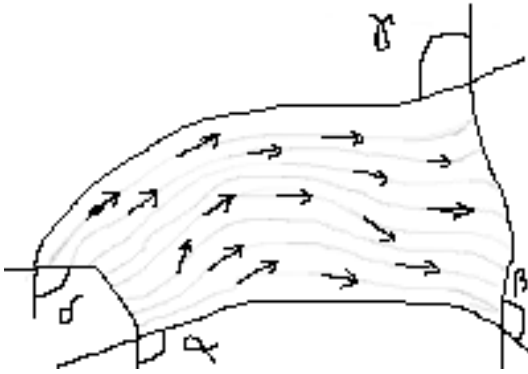
Para el teorema en general hace falta considerar bordes con puntas. En ese caso, la curvatura geodésica valdría infinito en las esquinas.. o mejor dicho, una delta por el valor del salto del angulo. Por eso, la integral  $\int k_g$  se reemplaza por la integral en los trozos diferenciables mas la suma de los ángulos (exteriores) de cada esquina.

**Teorema 5.9.** (el teorema de Gauss-Bonnet para un cuadrado) Sea  $x(u, v) : I \times I \rightarrow S$  la parametrización de un cuadrado, con  $\partial_u x \neq 0$ . Llamando  $\tilde{S}$  a la imagen de  $x$ , tenemos

$$\iint_{\tilde{S}} d^2x \sqrt{g} R + \int_{\partial \tilde{S}} k_g ds = 2\pi$$

donde está pre-supuesta la elección de un vector normal y la orientación de la superficie y la parametrización.

*Demostración.* Consideramos el siguiente dibujo:



y tomamos como Frame  $E_1 = \frac{1}{\|\partial_u\|} \partial_u$ ,  $E_2$  a un vector unitario tangente a  $S$  y perpendicular a  $E_1$ , y  $E_3$  al vector normal a la superficie. El  $E_2$  se elige de manera que el Frame quede orientado. Si calculamos la integral de la curvatura nos da:

$$\iint_{\tilde{S}} d^2x \sqrt{g} R = - \iint_{\tilde{S}} d\omega_{12} = - \int_{\partial\tilde{S}} \omega_{12}$$

Por otra parte, en cada trozo diferenciable  $C$  de  $\partial\tilde{S}$ ,

$$\int_C k_g = \phi(b) - \phi(a) + \int_C \omega_{12}$$

donde  $a$  y  $b$  son los extremos de la parametrización de  $C$ .

El término de integral de  $\omega_{12}$  en cada tramo suave se cancela, y queda entonces la suma de todas las diferencias de ángulo " $\phi(b) - \phi(a)$ " y los saltos de ángulos.

Si el borde lo parametrizamos de manera que a tiempo 0 estamos en el lugar donde está dibujado el ángulo  $\alpha$ , a tiempo 1 en donde doblamos en  $\beta$ , en 2 doblamos en  $\gamma$ , en 3 doblamos en  $\delta$  y en 4 volvemos al origen, tenemos la siguiente suma de ángulos:

$$\phi(1-) - \phi(0+) + \beta + \phi(2-) - \phi(1+) + \gamma + \phi(3-) - \phi(2+) + \delta + \phi(4-) - \phi(3+) + \alpha$$

Ahora bien, como el frame que tomamos tiene  $E_1$  apuntando en la misma dirección que  $\partial_u x$ , la curva es obviamente tangente a  $\partial_u x$  en los tramos  $\overline{01}$  y  $\overline{23}$ . Por lo tanto,  $\phi(1-) = 0 = \phi(0+)$ , y  $\phi(2+) = \pi = \phi(3-)$ , y las diferencias

$$\phi(1-) - \phi(0+) + \phi(3-) - \phi(2+) = 0$$

no aportan nada. Por otra parte,  $\phi(1+)$  es exactamente  $\beta$ , y para las otras:

$$\phi(2+) = \pi, \quad \phi(2-) = \pi - \gamma$$

(conviene recordar que ahora  $E_1$  sigue apuntando hacia la derecha, mientras que la curva empieza a apuntar a la izquierda)

$$\phi(3-) = \pi, \quad \phi(3+) = -\pi + \delta$$

$$\phi(4-) = -\alpha$$

Por lo tanto la suma de anulos

$$\phi(1-) - \phi(0+) + \beta + \phi(2-) - \phi(1+) + \gamma + \phi(3-) - \phi(2+) + \delta + \phi(4-) - \phi(3+) + \alpha$$

es igual a

$$+\beta + \pi - \gamma - \beta + \gamma + \delta - \alpha - (-\pi + \delta) + \alpha = +\pi + \pi = 2\pi$$

□

El teorema de Gauss-Bonnet queda demostrado despues de los siguientes procedimientos

- Ver que toda superficie se "cuadrangula" (si pensamos en una superficie como un objeto hecho de papel, o de una gran sábana cortada y cocida en diversos lugares, es claro que con una tijera podemos cortar la superficie y verla como unión de pequeños trozos cuadraditos..)
- ver que al integrar una union de polihedros, las integrales de los lados en comun se cancelan, los angulos que se dejan de contar en las esquinas se compensan con las integrales que dan  $2\pi$ , y llegar a una fórmula tipo fórmula( $A \cup B$ )=fórmula( $A$ )+fórmula( $B$ )-fórmula( $A \cap B$ ),
- finalmente ver que la característica de Euler tiene la misma propiedad (con respecto a la unión, ver sección Mayer - Vietoris), y que la característica de Euler de una superficie triangulada queda determinada por el valor de la característica de Euler de un triangulo (que es 1, en vez de  $2\pi$ ), por lo tanto, la integral en toda la superficie da  $2\pi$  veces la característica de Euler.

Una observación importante, es que para la relación entre la union y la interseccion, las orientaciones deben ser compatibles (por ejemplo, el mismo  $E_3$  para todos los pedazos), por eso es que la orientación juega un papel fundamental.

