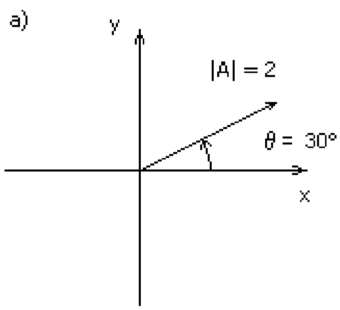
Practica 1: Vectores

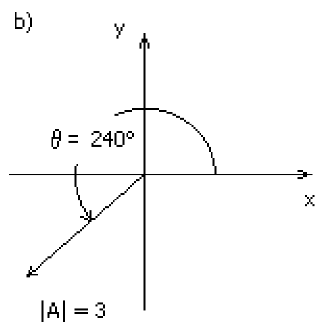
1) Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.

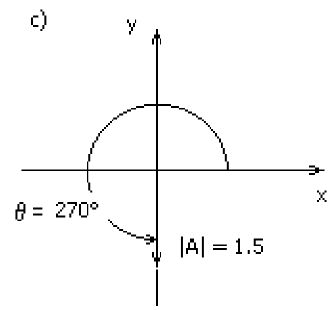
   a) **A**= (-4; 3) b) **B** = (2; 0) c) **C** = (-2 $\hat{i}$ – 3 $\hat{j}$) d) **D** = (0 $\hat{i}$ – 5 $\hat{j}$)

2) Dados los vectores del ejercicio anterior, halle vectores de modulo 1 en la dirección y sentido de dichos vectores.

3) Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:







4) Dados los vectores **A** y **B** indicados, halle su suma y su diferencia por medio de la regla del paralelogramo.

   a) **A** = (-3; 2) **B** = (-2; 5)

   b) **A** tal que |**A**| = 2 , θ = 240 ° **B** tal que |**B**|= 3 , θ = 135 °

   c) **A** = (-2; 0) **B** = (0; 4)

5) Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector **A** + **B**, y del **A** – **B**.

6) Halle el módulo del vector de origen (2; -5; 8) y extremo en (-4; -3; 2).

7) Dados los vectores:

   A = ($3\hat{i}$ + $2\hat{j}$ + $3\hat{k}$) **B** = ($4\hat{i}$ – $3\hat{j}$ + $2\hat{k}$) **C** = ($-2\hat{j}$ – $5\hat{k}$)

   efectúe las siguientes operaciones:

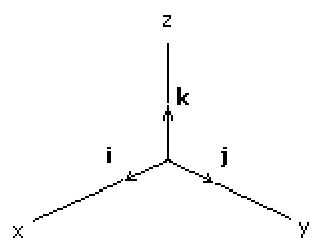
   a) (**A** – **B**) / |**C**| + **C**

b) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$

c) $-(2)\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}/5$

Se define el **producto escalar** de dos vectores como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

8) Sean $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



$\hat{\boldsymbol{i}} = (1;0;0)$ $\hat{\boldsymbol{j}} = (0;1;0)$ $\hat{\boldsymbol{k}} = (0;0;1)$

Calcule $\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$

9) Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = B_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$

entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

10) Efectúe el producto escalar de los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B**.

a) $\mathbf{A} = 3\hat{\boldsymbol{i}} - 2\hat{\boldsymbol{j}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = -\hat{\boldsymbol{i}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}$

b) $\mathbf{A} = (2;\ 3;\ -1)$ $\qquad$ $\mathbf{B} = (6;\ -5;\ 2)$

c) $|\mathbf{A}| = 3$ $\quad$ $|\mathbf{B}| = 2$ $\quad$ $\theta = 60°$ $\quad$ (θ ángulo entre **A** y **B**)

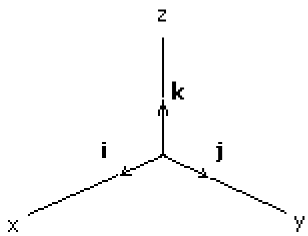
Se define el **producto vectorial** como $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ tal que

a) $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores

b) **C** tiene dirección perpendicular al plano determinado por **A** y **B**

c) El sentido es tal que **A**, **B** y **C** tengan la misma orientación en el espacio

11) Sean $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



Calcule

$\hat{\imath} \times \hat{\imath}$, $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, $\hat{\imath} \times \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{\imath}$, $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\jmath}$, $\hat{k} \times \hat{k}$.

12) Usando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si:

$\mathbf{A} = A_x\, \hat{\imath} + A_y\, \hat{\jmath} + A_z\, \hat{k}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = B_x\, \hat{\imath} + B_y\, \hat{\jmath} + B_z\, \hat{k}$

entonces

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y \,;\; A_z B_x - A_x B_z \,;\; A_x B_y - A_y B_x)$

13) Sean los vectores $\mathbf{A} = (3;\, 2;\, 1)$ $\mathbf{B} = (1;\, 0;-1)$ $\mathbf{C} = (0;-2;\, 4)$ calcule:

a) $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$

b) $-4(\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \mathbf{A}$

c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

d) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).\mathbf{C}$

14) Dado el vector $\mathbf{r} = (t^3 + 2t + 1)\, \hat{\imath} - e^{2t}\, \hat{\jmath} + \cos(3t)\, \hat{k}$ halle :

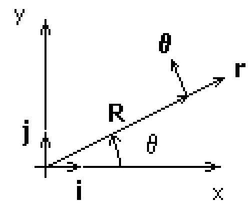
a) $d\mathbf{r} / dt$

b) $|\, d\mathbf{r} / dt \,|$

c) $d^2\, \mathbf{r} / d^2t$

En los tres casos especializar en $t = 0$ y en $t = \pi/6$.

15) El radio vector **R** tiene las componentes cartesianas $\mathbf{R} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. En función de los versores $\hat{\theta}$ y $\hat{r}$, **R** toma la forma: $\mathbf{R} = R\, \hat{r}$.



Demuestre que:

a) $\hat{\boldsymbol{r}}$ = cos θ $\hat{\boldsymbol{i}}$ + sen θ $\hat{\boldsymbol{j}}$ $\qquad$ $\hat{\theta}$ = -sen θ $\hat{\boldsymbol{i}}$ + cos θ $\hat{\boldsymbol{j}}$

b) d$\hat{\boldsymbol{r}}$ **/**dθ = $\hat{\theta}$ $\qquad$ d$\hat{\theta}$ **/**dθ = -$\hat{\boldsymbol{r}}$

c) A partir de **R** = R $\hat{\boldsymbol{r}}$ **,** pruebe que **v** = d**R**/dt = $\dot{R}\ \hat{\boldsymbol{r}} + R\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

d) Para valientes: pruebe que **a** = d**v**/dt = $(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\,\hat{\boldsymbol{r}} + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Ayuda: utilice las relaciones

d$\hat{\boldsymbol{r}}$ /dt = (d$\hat{\boldsymbol{r}}$ /dθ) (dθ/dt) = $\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ $\qquad$ d$\hat{\theta}$ /dt = (d$\hat{\theta}$ /dθ) (d$\dot{\theta}$ /dt) = -$\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}}$