.

GUIA DE COSMOLOGIA – 2do Cuatrimestre 2002

Curso de postgrado u optativo de grado – Dept de Física, FCEyN-UBA

II. : radiacion y materia – expansion – densidad, capacidad calorifica – luminosidad de galaxias νs masivos – ley de Planck – entropia/barion – dipolo y cuad. cinematicos – ultima: 4-09-2002

SB) De acuerdo con la cosmologia estandar, el universo se expande y enfria. Actualmente, su temperatura esta dada por la temperatura efectiva de la radiacion de fondo (CMB), correspondiente a unos 2.76K . Usando la ley de Stefan–Boltzmann, calcule la densidad de energia actual de este fondo de radiacion. Que fraccion de la densidad critica ρ_c representa? [estime su parametro de densidad $\Omega_{\rm rad}$]. Si la radiacion fue el componente dominante en el universo primordial, continua aun hoy dominando la materia/energia del universo?

Z234) Recientes mediciones realizadas con el telescopio Kueyen del ESO en Chile, en las que se observaron nubes densas de gas aisladas a $z \sim 2.34$, mostraron que la CMB tenia una temperatura de entre 6K y 14K (para ser especifico, considere que midieron 9.1K; por que 9.1K?). Vuelva a calcular la densidad de energia a $z \sim 2.34$. Que valor para $\Omega_{\rm rad}$ resulta? Es mayor o menor que lo calculado previamente?

H234) El parametro de Hubble varia con el tiempo/temperatura del universo (T). Si consideramos que para epocas recientes su variacion es $H \propto T^{3/2}$, vuelva a calcular $\Omega_{\rm rad}(z \sim 2.34)$ y responda, es mayor o menor que $\Omega_{\rm rad}(z \sim 0)$?.

WI) El espectro de la radiacion de fondo sigue con asombrosa precision la curva teorica de un cuerpo negro a temperatura 2.76K. Utilice los resultados del ejercicio **SB)** junto con la ley de Wien para dar una estimacion del numero de fotones por centimetro cubico, n_γ.

C) En la epoca presente la radiacion termica juega un rol comparativamente poco importante en el comportamiento mecanico y termico de cuerpos materiales. Para verlo, basta tomar un volumen unidad de aire a temperatura y densidad normales. Como sabemos ya, este volumen incluye, ademas del aire, el “gas” formado por los cuantos de la radiacion termica. Verifique el rol menor de esta ultima, sabiendo que la densidad de masa y la capacidad calorifica por unidad de volumen de esta mezcla estan dadas por

$$\rho = mn + aT^4/c^2 \qquad C = \frac{3}{2}k_{\rm B}n + 4aT^3,$$

donde m y n son la masa promedio de las particulas de aire y su numero por unidad de volumen, respectivamente, y donde $k_{\rm B}$ y a son las constantes de Boltzmann y de densidad de radiacion.

CS) Que pasa si ahora se traslada al centro de una estrella y considera la mezcla de materia y radiacion con $\rho = 100{\rm g/cm}^3$ y $T = 2 \times 10^7$K? Cambian en algo sus conclusiones sobre ρ y C? Y si la T fuera aun mayor? [comentario: claro que ahora $C = \frac{3}{2}k_{\rm B}n$ para la materia *no* tiene por que ser cierto. Suponga que *sí* lo es y tome $n \sim 5 \times 10^{25}{\rm cm}^{-3} \sim \rho/m_{\rm proton}$]

CG) Traslademosnos ahora al espacio interestelar, donde encontramos nubes de gas con densidades $\rho \sim 10^{-24}{\rm g/cm}^3$ y temperaturas de $T \sim 100$K. Que valores resultan ahora para ρ y C? Cual de los dos componentes sera mas relevante en lo que respecta a consideraciones termodinamicas? En particular, si un dado volumen de la mezcla se expande o se contrae adiabaticamente, cual de los dos componentes determinara la variacion de su temperatura?

.

CU) Finalmente, el balance entre materia y radiacion en el universo es en muchos aspectos similar al caso del gas interestelar. Si, por simplicidad, tomamos $\rho \sim 10^{-30}\text{g/cm}^3$ para la materia y una temperatura de $T \sim 1\text{K}$, como es la capacidad calorifica por unidad de volumen de la radiacion comparada con la de la materia? A que temperatura serian aproximadamente iguales?

S76) La funcion de luminosidad de las galaxias (FLG) describe la distribucion de galaxias con diferentes luminosidades intrinsecas. La FLG se define como el numero dN de galaxias por unidad de volumen con luminosidades en el intervalo entre L y $L + dL$. Las observaciones sugieren

$$dN = \phi\left(\frac{L}{L_*}\right) \frac{dL}{L_*} \ ,$$

donde la funcion de Schechter es $\phi(y) = \phi_* y^\alpha e^{-y}$ y los parametros α, L_* y ϕ_* estan dados por $\alpha \approx -1$, $L_* \approx 10^{10} h^{-2} L_\odot$ (luminosidad galactica tipica), y $\phi_* \approx 10^{-2} h^3 \text{Mpc}^{-3}$.
i) Calcule la luminosidad media por unidad de volumen, j.
ii) A partir del valor de j, estime la densidad numerica tipica de las galaxias (en unidades $1/\text{Mpc}^3$) y la separacion media entre las galaxias.
iii) Las luminosidades de la Via Lactea y de su vecina Andromeda son comparables a L_*. Que valor esperaria Ud para la distancia que las separa? Discuta.
iv) Estime el numero de galaxias que contiene nuestro universo observable.
v) Sabiendo que para redshifts bajos, la relacion $z \simeq H_0 r/c$, con H_0 constante, es aproximadamente correcta, y que el flujo observado de la radiacion de la galaxia, f , se relaciona con la luminosidad intrinseca, L , mediante la relacion $f \simeq L/(4\pi r^2)$, estime el numero de galaxias por unidad de intervalo de redshift y por unidad de angulo solido ($d\Omega$) con flujos entre f y $f + df$ [en otros terminos, calcule $d^3N/(d\Omega\ dz\ df)$.]
vi) Si la relacion "masa-a-luz" (mass-to-light ratio) de las galaxias es aproximadamente $12h(M_\odot/L_\odot)$, cual es la contribucion de las galaxias a la masa/energia total de un universo critico? [hint: use el j calculado mas arriba y estime el parametro Ω (no confundir con el angulo solido!)]

NU) Entre los candidatos a proveer la materia oscura requerida por la dinamica de galaxias y la formacion de estructuras, los neutrinos masivos, ν , tienen un papel privilegiado: sabemos que los neutrinos existen y, ademas, experiencias recientes sugieren que ciertos de estos serian masivos. Si su abundancia hoy (numero de νs por centimetro cubico) es una fraccion de la de los fotones de la CMB, $n_\nu = (3/11) n_\gamma$ (por especie de neutrino), que masa deberian tener los neutrinos (considerados "no relativistas") para "cerrar el universo" [hacer que $\Omega_\nu = 1$]? Es este valor compatible con las observaciones, *e.g.*, de Super-Kamiokande y del Sudbury Neutrino Observatory? Sabemos que $m_\nu c^2 \sim k_B T_\nu$ es el limite que separa νs relativistas de νs no relativistas. Si $T_\nu \sim 2\text{K}$ para los "neutrinos de fondo", verifique que la hipotesis de νs no relativistas para lograr $\Omega_\nu = 1$ esta bien fundada.

PLA) El espectro de la radiacion termica sigue la curva dada por la ley de Planck. Dejando de lado ciertas constantes fundamentales (k_B, h, c), la ley de Planck solo depende de la temperatura T, ya sea en su version $B_\nu(T)$ (escrita en funcion de la frecuencia) o $B_\lambda(T)$ (en funcion de la longitud de onda). Sabiendo que estas verifican $\nu B_\nu(T) = \lambda B_\lambda(T)$, calcule la posicion del pico de la distribucion, $\nu_{\max}$ o $\lambda_{\max}$, segun sea el caso, para la temperatura actual de la CMB (nuevamente, la ley de Wien). Se verifica $\nu_{\max}\lambda_{\max} = c$? [$B_\nu(T)$ es la llamada intensidad especifica o brillo espectral, con unidades $[B_\nu(T)]$ = energia $(\text{tiempo})^{-1}$ $(\text{area})^{-1}$ $(\text{angulo solido})^{-1}$ $(\text{frecuencia})^{-1}$. Consulte algun libro de procesos radiativos, *e.g.*, el Rybicki & Lightman]

M0NU) La densidad numerica n de un gas diluido de particulas poco interactuantes con g grados de libertad internos es

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p$$

donde $f(\vec{p})$ es la funcion de distribucion en el espacio de fases (o tambien, la funcion ocupacion), y $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Si f esta dada por la distribucion de Fermi-Dirac $f(\vec{p}) = [\exp(E/(kT)) + 1]^{-1}$, deduzca explicitamente la expresion para n en el caso de neutrinos masivos y no masivos (con potencial quimico nulo). Muestre que, al igual que como sucede con el espectro de la CMB, aqui tambien el espectro para una distribucion de neutrinos no masivos $n(E)dE$ se preserva durante la expansion del universo. Finalmente, resuelva la integral y obtenga la expresion $n = (3/4)(\zeta(3)/\pi^2)gT^3$, en "unidades naturales" y donde ζ es la funcion zeta de Riemann [hint: la solucion *no* esta en el Kolb & Turner].

STOB) Considere una expansion adiabatica para nuestro universo en epocas recientes. Estime la densidad de entropia y un valor adimensional para la entropia por barion en el universo. Justifique la hipotesis de adiabaticidad considerando al universo como un sistema termodinamico y dando la dependencia de energias y volumenes con la temperatura. Calcule ahora la entropia total de nuestro universo observable. En grande o chica? Contra que la compararia?

DIP) Un observador en reposo respecto a un radiador de cuerpo negro ideal vera un campo de radiacion perfectamente homogeneo e isotropo. Pero, que pasara si el observador se mueve respecto de la cavidad? K.Mosengeil, estudiante de Max Planck, dio la respuesta en 1907. En notacion moderna,

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - V\cos\theta'/c)}$$

donde T' es la temperatura medida por el observador en movimiento y θ' el angulo respecto de su direccion de movimiento del cual recibe la radiacion. Como de costumbre $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ y V es la velocidad relativa entre observadores [a este punto de la guia, Ud ya deberia saber quien es y cuanto vale T].
Deduzca de esta expresion las amplitudes del dipolo y del cuadrupolo cinematicos (cual es el monopolo?).
Definiendo la anisotropia adimensional $\Delta \equiv \Delta T/T \equiv (T' - T)/T$, cual es el valor del monopolo (por definicion) y de los dos siguientes multipolos superiores de Δ?
Sabiendo que la amplitud medida del dipolo de la CMB es $\Delta_{\rm dip} \sim 1.24 \times 10^{-3}$ y que el cuadrupolo intrinseco (*i.e.*, no cinematico) de la CMB es del orden de 5×10^{-6}, puede uno estar seguro de que el cuadrupolo cinematico es despreciable?

3R) A las mayores escalas observables, el universo es homogeneo e isotropo a un nivel de al menos una parte en diez mil desde que contaba con unos pocos cientos de miles de años (hoy tiene alrededor de 12 Gyr). De tres buenas razones que avalen esta afirmacion. [note que si estuvieramos realmente seguros, con una nos alcanzaria]