Alejandro Gangui

Instituto de Astronomía y Física del Espacio, UBA-Conicet

Triángulos, senos y tangentes: matemática simple para construir un reloj de sol horizontal

Diversos tipos de relojes de sol

Hay diversas clases de relojes solares. En un número anterior de Ciencia Hoy, citado al final entre las lecturas sugeridas, vimos cómo construir uno de tipo *ecuatorial* (figura 1) usando materiales sencillos, como papel o cartón. Ese dispositivo permite conocer el paso del tiempo por la sombra que arroja un triángulo vertical, llamado *gnomon*, sobre una superficie plana, llamada *tablero* o *cuadrante*, en la que se dibujaron *líneas horarias*. Una particularidad del reloj ecuatorial es que dicha superficie plana debe ser paralela al plano del ecuador celeste, que se forma por prolongación del ecuador terrestre en la bóveda del cielo. La diagonal o hipotenusa del gnomon, además, debe ser perpendicular al tablero, es decir, apuntar al polo celeste del hemisferio para el que se construyó el reloj, que es la prolongación a la bóveda celeste del eje de rotación de la Tierra.

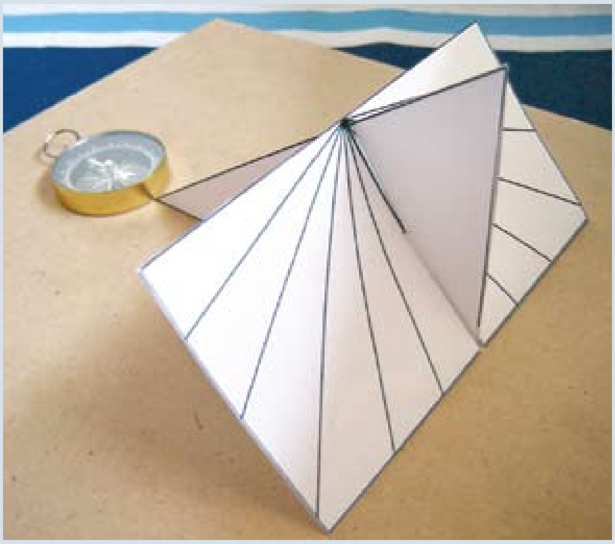


Figura 1. Reloj de sol ecuatorial para una latitud intermedia del hemisferio sur a ser construido en el aula, según lo explicó una nota anterior nuestra en Ciencia Hoy citada entre las lecturas sugeridas. El gnomon –triángulo vertical de cartón– está alineado en dirección norte-sur, como lo muestra la brújula colocada en su extremo norte. La diagonal o hipotenusa del gnomon apunta al polo sur celeste. El tablero o cuadrante contiene las líneas horarias y está en el plano del ecuador.

En términos generales, un reloj solar construido para ser usado en determinada latitud no funcionará correctamente en latitudes muy diferentes. Esa dificultad se alivia en gran medida con un reloj ecuatorial, pues otra de sus particularidades es que la separación entre las líneas horarias de su tablero no cambia al variar la latitud. Sí cambian la inclinación del gnomon y del tablero, pues al modificarse la latitud se altera la altura del polo en el cielo: a mayor latitud (mayor alejamiento del ecuador y mayor cercanía al polo terrestre), mayor altura del polo celeste sobre el horizonte, hasta que en el propio polo terrestre se ubica exactamente en el cénit.

A pesar de esas ventajas de los relojes ecuatoriales, la mayoría de los que se encuentran en los parques y las calles de todo el mundo son horizontales (figura 2) o verticales (figura 3), los cuales, sin embargo, resultan para el público general algo más difíciles de comprender, debido a que presentan alguna complejidad de índole geométrica (no astronómica). En esta nota explicaremos en detalle algunos pasos simples para fabricar en el aula un reloj horizontal (o vertical) partiendo del tablero de uno ecuatorial y usando solamente un poco de trigonometría y una calculadora.

Un procedimiento gráfico para entender una compleja geometría

Consideremos el tablero del reloj ecuatorial descripto en la mencionada nota de Ciencia Hoy, para lo que aconsejamos tenerla a mano. Recurriremos en primer lugar a un método gráfico para entender la operación que nos proponemos realizar.

Tomemos un soporte plano (inicialmente en blanco), que terminará siendo el tablero del reloj horizontal, con las correspondientes líneas horarias. Fijemos sobre él un gnomon (un alambre recto rígido, por ejemplo) cuya inclinación sea la

¿DE QUÉ SE TRATA?

Cómo fabricar en el aula un reloj solar horizontal a partir de uno ecuatorial usando trigonometría simple y una calculadora.

Figura 2. Reloj horizontal frente al planetario Morehead de la Universidad de Carolina del Norte en Chapel Hill. Foto Ken Bloch

Figura 3. Reloj vertical sobre el muro de una iglesia en Lannion, Bretaña. Foto Dr Cosmos, Wikimedia Commons.

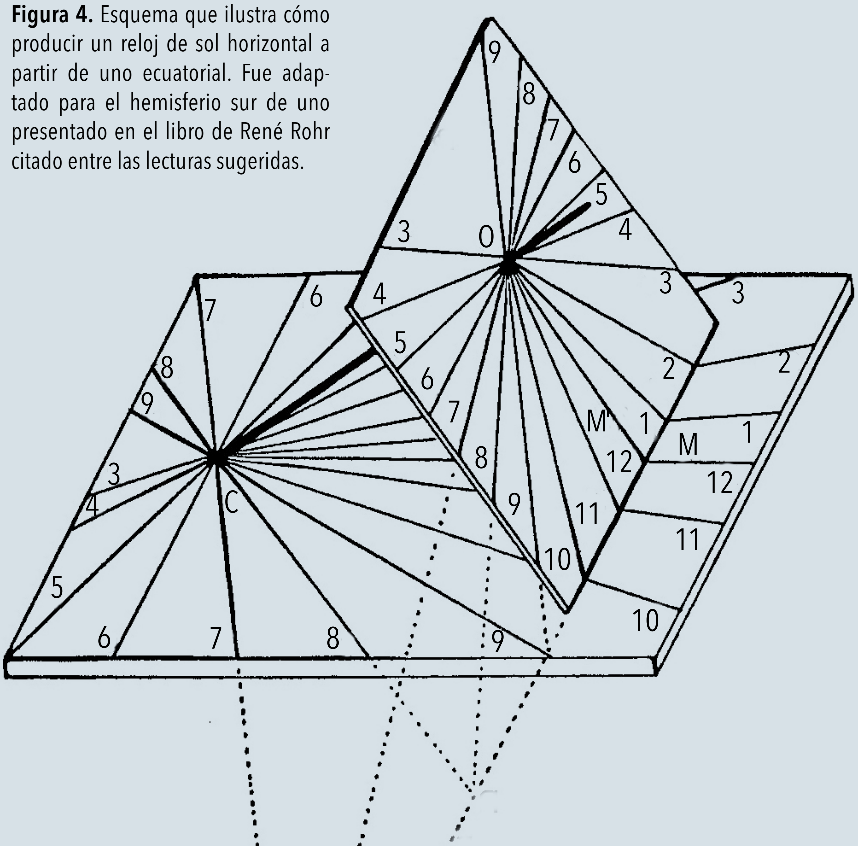
adecuada para el lugar donde queremos usar el reloj horizontal, es decir, cuidemos que el ángulo que forme el gnomon con el soporte plano sea igual a la latitud del lugar. Luego, como lo indica la figura 4, ensartemos –por su centro O– el tablero del reloj ecuatorial de la figura 1 en el gnomon, hasta que apoye en el soporte horizontal todavía en blanco. Cuidemos que no se altere la inclinación elegida del gnomon y que el tablero ensartado quede perpendicular a este.

Las líneas horarias del tablero del reloj ecuatorial tocarán el soporte del reloj horizontal en varios puntos. Unamos esos puntos mediante rectas con el centro C del reloj horizontal, como están dibujadas en la figura 4. La línea de las 12 horas del reloj ecuatorial (línea OM' del gráfico) toca el soporte horizontal en las 12 horas (línea CM). Además, debe estar orientada en dirección norte-sur, la dirección de la *meridiana* del lugar.

Adviértase que la división de las líneas horarias del reloj ecuatorial es siempre de 15°, pero que esa constancia no se mantiene en el reloj horizontal, pues en este ni es siempre la misma, ni vale 15°. La variación del espaciamiento de las líneas horarias del tablero del reloj horizontal será tanto más pronunciada cuanto menor sea el ángulo del gnomon con respecto a la horizontal, es decir, cuanto menor sea la latitud para la que se construye el reloj; en otras palabras, cuanto más cerca del ecuador se lo quiera usar y más cerca de la vertical quede su tablero. Contrariamente, y como es simple de imaginar mirando la figura, cuando el ángulo que forma el gnomon con la horizontal es 90°, los tableros de ambos relojes (horizontal y ecuatorial) coinciden. En otras palabras, en ambos polos de la Tierra, un reloj de sol horizontal es igual a uno ecuatorial.

Como se aprecia en la figura 4, el trazado de las líneas horarias del reloj horizontal no presenta mayores problemas para las horas cercanas al mediodía solar. Ese trazado, sin embargo, se complica para las horas alejadas del mediodía, por

Figura 4. Esquema que ilustra cómo producir un reloj de sol horizontal a partir de uno ecuatorial. Fue adaptado para el hemisferio sur de uno presentado en el libro de René Rohr citado entre las lecturas sugeridas.



ejemplo, antes de las 9 de la mañana. En particular, la línea de las 6 de la mañana del reloj ecuatorial es paralela al plano horizontal (o lo toca en el infinito). Lo mismo sucede con la de las 6 de la tarde. Por ello es útil recurrir a un método analítico para realizar mediante unos pocos cálculos el trazado de las líneas. El que presentaremos quizá sea menos directo e intuitivo, pero no tiene esas limitaciones.

Cálculo de las líneas horarias del tablero de un reloj de sol horizontal

Volvamos a considerar el reloj ecuatorial que vimos al inicio de la nota (figura 5). Recordemos que el instrumento se compone de dos piezas ensambladas: el gnomon vertical (CFM) y el tablero inclinado (BPLT). En la figura 5 se distinguen por diferencias de tono (la parte más clara del gnomon solo se vería si el tablero fuera transparente). La figura 6 corresponde al mismo reloj con varios segmentos marcados, los que se reproducen en la figura 7. En esta, el plano vertical SCM corresponde al meridiano y forma parte del gnomon; es perpendicular al plano horizontal MCA, que forma parte del tablero del reloj horizontal que queremos construir. El ángulo λ está sobre el plano vertical y corresponde a la latitud del lugar, pues CS es la hipotenusa o diagonal de gnomon. Como el triángulo SAM es parte del tablero del reloj ecuatorial, está en un plano que es perpendicular al segmento CS. CM es la línea del mediodía del reloj horizontal; SM es la misma línea del reloj ecuatorial.

Los *ángulos horarios* α y β se definen con relación a la línea del mediodía, tomada como referencia. El ángulo α pertenece al plano SAM y es un dato conocido, pues vale 15° o un múltiplo de 15° hasta 90° (el último valor corresponde a la hora 6). Ese ángulo marca las líneas horarias del reloj ecuatorial. El ángulo horario β pertenece al plano horizontal MCA y corresponde a las líneas horarias del reloj horizontal. Es nuestra incógnita: queremos calcular los valores de β correspondientes a los distintos valores de α (en las figuras 6 y 7, por ejemplo, α vale 30°).

Para realizar el cálculo, recurrimos a un poco de trigonometría sencilla. Como el plano SAM es perpendicular al segmento CS, el seno de λ es SM/CM. Como el plano SAM es perpendicular al plano vertical del meridiano SCM, la tangente de β es AM/CM (pues sobre el plano horizontal MCA, el ángulo del vértice M es de 90°). Por último, la tangente de α es AM/SM. En síntesis, esas tres relaciones son:

$$SM/CM = \text{sen}\ \lambda$$
$$CM/AM = 1/\tan\beta$$
$$AM/SM = \tan\alpha$$

Multipliquemos ahora los tres miembros de la izquierda entre sí e igualemos su resultado a la multiplicación de los tres miembros de la derecha, es decir, multipliquemos tres ecuaciones miembro a miembro. Queda:

$$(SM/CM)\,(CM/AM)\,(AM/SM) = (\text{sen}\ \lambda)\ (1/\tan\beta)\,(\tan\alpha)$$

Simplificando, obtenemos:

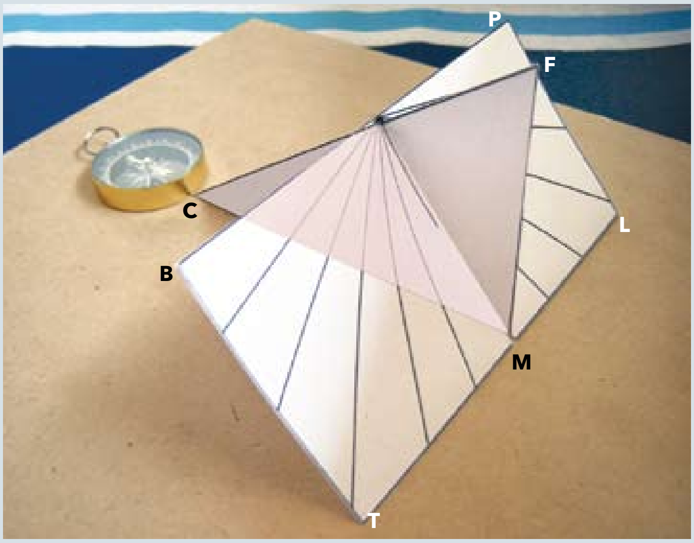
$$1 = (\text{sen}\ \lambda)\ (1/\tan\beta)\,(\tan\alpha)$$

Si pasamos tan β al miembro de la izquierda, finalmente nos queda:

$$\tan\beta = (\text{sen}\ \lambda)\ (\tan\alpha) \qquad \textit{Reloj horizontal}$$

Esa es la relación que buscábamos para β. Dado el ángulo λ (la latitud del lugar) y fijados sucesivos valores para α (15° y sus múltiplos hasta 90°, correspondientes a las 11, 10, 9, 8, 7 y 6 de la mañana) del reloj ecuatorial, si hacemos la cuenta expresada en el miembro de la derecha de la última ecuación, obtenemos los sucesivos valores de tan β, a partir de los cuales, con una calculadora elemental, podemos obtener los valores de los sucesivos ángulos β.

Con esos valores de β podremos trazar las líneas horarias de nuestro reloj de sol horizontal, incluso las que resultaban problemáticas por el procedimiento gráfico. Los ángulos β correspondientes a cualquier hora –por ejemplo, las 5:30 o



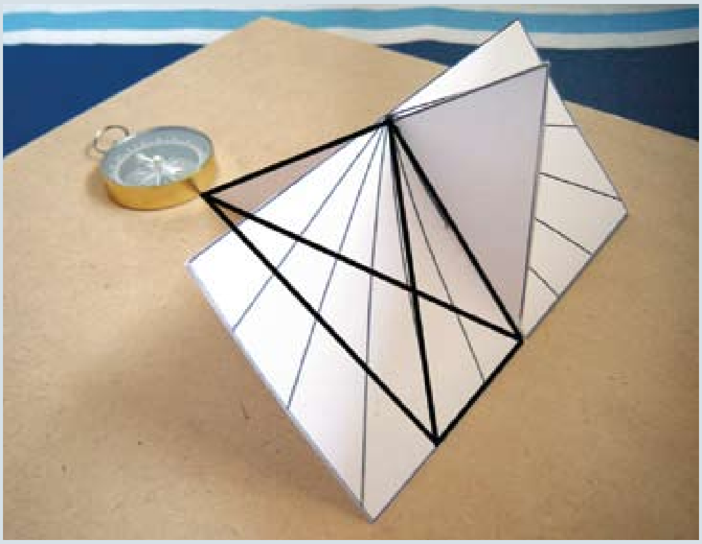


Figura 5. Nueva imagen del reloj de sol ecuatorial de la figura 1 en la que se destacan las dos piezas ensambladas que componen el instrumento: el gnomon vertical (CFM) y el tablero inclinado (BPLT). Adviértase que la parte más clara del primero solo se vería si el segundo fuera transparente.
Figura 6. Fotografía del mismo reloj de sol ecuatorial sobre la que el autor marcó varios segmentos que conforman una estructura tridimensional explicada en la figura siguiente.

las 2:45–, es decir, los ángulos β que las líneas de esas horas forman con la de las 12, pueden obtenerse usando la misma fórmula con igual facilidad (recordar que 1° corresponde a 4 minutos en el tablero del reloj ecuatorial).

En caso de querer fabricar un reloj vertical, el procedimiento es análogo, pero esta vez en lugar de proyectar el triángulo SAM del reloj ecuatorial sobre un plano horizontal, se lo debe proyectar sobre uno vertical. Para ello no hay que usar el seno de λ sino el de su ángulo complementario, o sea, el seno de 90–λ, que es el coseno de λ. La fórmula final para un reloj vertical resulta entonces:

$$\tan \beta = (\cos \lambda)\ (\tan \alpha) \qquad \textit{Reloj vertical}$$

Daremos tres ejemplos para mostrar el uso de la ecuación deducida para el reloj horizontal: los ángulos β correspondientes a tres ciudades argentinas ubicadas en latitudes diferentes: La Quiaca (λ = 22°), Buenos Aires (λ = 35°) y Ushuaia (λ = 55°). Los tres valores de latitud son aproximados y, como se sabe, están al sur del ecuador.

Como podemos verificar, los ángulos deducidos para Buenos Aires concuerdan bien con los que hemos dibujado en la figura 5 de nuestra nota de Ciencia Hoy de abril-mayo de 2009. Quede como ejercicio para el lector armar un reloj solar horizontal para su localidad, tomando la latitud aproximada de su lugar de residencia.

Otro método gráfico

Terminaremos esta nota explicando otro método gráfico para diseñar un reloj de sol horizontal. Sobre la base de la figura 4, podemos dibujar los tableros de los relojes ecuatorial y horizontal uno sobre el otro, como están en la parte central agrisada de la figura 8: el rectángulo más oscuro pertenece al reloj ecuatorial y tiene líneas horarias con la conocida separación de 15°. El otro rectángulo corresponde al reloj horizontal y lo dibujamos inicialmente sin las líneas horarias, pues son precisamente lo que queremos determinar por este método. Al empezar el dibujo sabemos que ambos rectángulos tienen el mismo ancho, pero ignoramos qué altura dar al inferior.

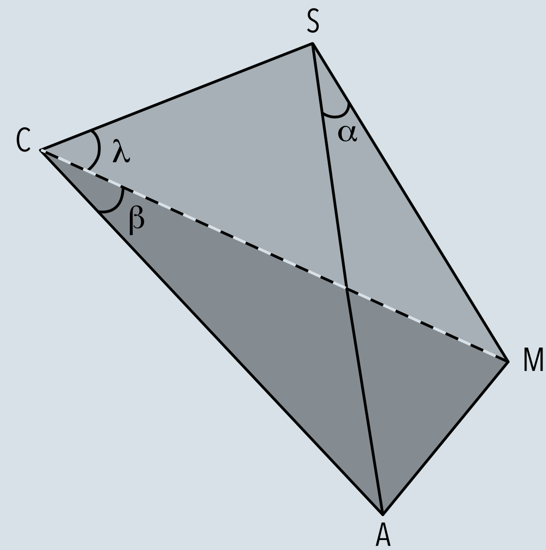


Figura 7. Esquema de la estructura tridimensional formada por el triángulo rectángulo CMA, perteneciente al tablero del reloj de sol horizontal, el igualmente rectángulo SMA, del tablero del reloj ecuatorial, y el CSM, que está en el plano vertical del gnomon. El segmento CS es parte de la hipotenusa o diagonal del gnomon. CM es la línea del mediodía del reloj horizontal; SM es la misma línea del reloj ecuatorial.

λ = 22° (La Quiaca)

α (en grados)	tan β = (sen λ) (tan α)	β	β (en grados)
15	0,1003	5,731	5° 44′
30	0,2162	12,203	12° 12′
45	0,3746	20,536	20° 32′
60	0,6488	32,977	32° 58′
75	1,3980	54,424	54° 25′
90	→∞	90	90°

λ = 35° (Buenos Aires)

α (en grados)	tan β = (sen λ) (tan α)	β	β (en grados)
15	0,1536	8,737	8° 44′
30	0,3311	18,322	18° 19′
45	0,5735	29,837	29° 50′
60	0,9934	44,812	44° 48′
75	2,1406	64,960	64° 57′
90	→∞	90	90°

λ = 55° (Ushuaia)

α (en grados)	tan β = (sen λ) (tan α)	β	β (en grados)
15	0,2194	12,379	12° 22′
30	0,4729	25,311	25° 18′
45	0,8191	39,322	39° 19′
60	1,4188	54,823	54° 49′
75	3,0571	71,886	71° 53′
90	→∞	90	90°

Si lográsemos averiguar este último dato, tendríamos resuelto el problema de trazar las ausentes líneas horarias del reloj horizontal, ya que, como indica la figura 8, basta extender todas las del reloj ecuatorial hasta que lleguen a un punto de la prolongación de la recta que separa ambos tableros, y luego unir ese punto con el centro del lado inferior del tablero del reloj horizontal.

Retornemos a la fórmula que dedujimos, a saber, $\tan \beta = (\text{sen}\ \lambda)\ (\tan \alpha)$. Elijamos un valor conveniente de α, como 15°. Fijemos también la latitud λ, para que corresponda al lugar de uso del reloj que estamos construyendo. La fórmula nos permite así averiguar el valor del ángulo β.

Con esos datos, consideremos la figura 9. Conocemos los ángulos α y β, así

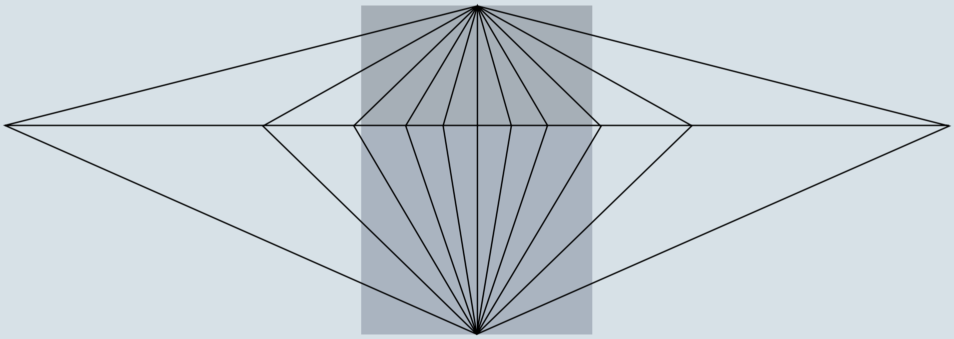


Figura 8. Esquema útil para diseñar el tablero de un reloj horizontal (rectángulo agrisado inferior) a partir del tablero de un reloj ecuatorial (rectángulo agrisado superior) como el representado en la figura 4.

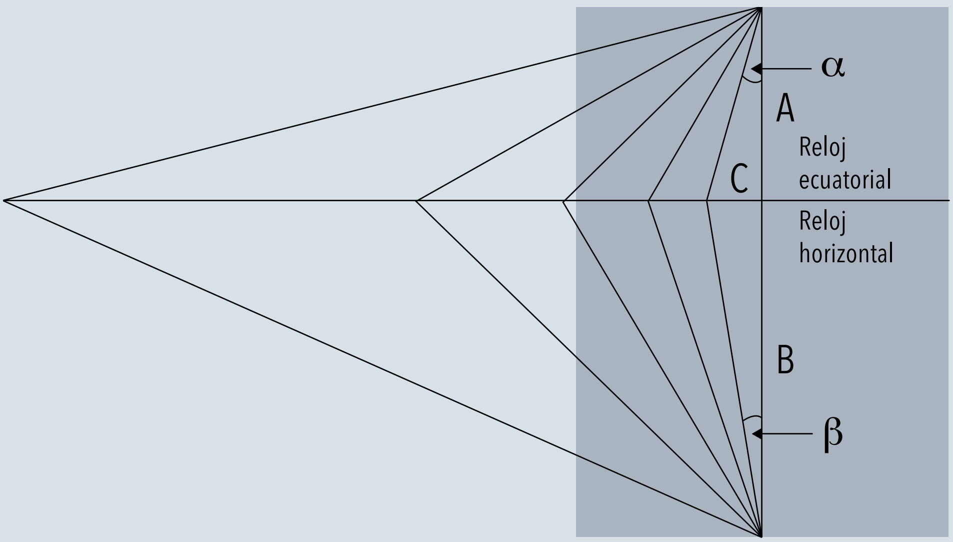


Figura 9. Conociendo las dimensiones del tablero del reloj ecuatorial (rectángulo agrisado superior) y la fórmula que relaciona ß con α para determinada latitud, es posible deducir la longitud del tablero del reloj horizontal. En este esquema, C es un pequeño segmento compartido por ambos tableros y cateto opuesto a los ángulos α y ß de los dos triángulos rectángulos mostrados.

como la longitud A, pues esta pertenece a nuestro reloj ecuatorial. Solo nos falta averiguar B. Usando nuevamente un poco de trigonometría simple, tenemos

$$\tan \alpha = C/A$$
$$\tan \beta = C/B$$

En ambas ecuaciones podemos despejar C. Combinándolas, deducimos que

$$\tan \beta = (A/B) \tan \alpha$$

Pero sabíamos que

$$\tan \beta = (\text{sen}\ \lambda)\ (\tan \alpha)$$

Comparando estas dos ecuaciones deducimos que

$$B = A / \text{sen}\ \lambda$$

En el caso particular de la ciudad de Buenos Aires, la latitud es aproximadamente $\lambda = 35°$. Entonces sen λ es 0,57 y B resulta 1,74 veces A. Las figuras 8 y 9 muestran exactamente esta relación entre los lados A y B de los tableros de los relojes ecuatorial y horizontal.

Como puede deducirse de la última fórmula, B será siempre mayor o igual que A, pues el seno de un ángulo es siempre menor o igual que 1. B será exactamente igual a A solo para los polos ($\lambda = 90°$), lo que confirma lo dicho antes: que en ambos polos de nuestro planeta un reloj horizontal es idéntico a uno ecuatorial. CH

El autor agradece a sus colaboradoras María Iglesias y Cynthia Quinteros las extensas discusiones sobre temas de relojería solar. Recibió apoyo financiero de los subsidios PIP 11220090100583 del Conicet y 20020090200480 de la Universidad de Buenos Aires.

LECTURAS SUGERIDAS

GANGUI A, 2011, 'Cómo construir y usar en el aula un sencillo reloj de sol ecuatorial', Ciencia Hoy, 122: 48-51, abril-mayo.

–, **IGLESIAS M y QUINTEROS C**, 2009, 'El movimiento de las sombras', Ciencia Hoy, 110: 48-56, abril-mayo.

ROHR RJ, 1986, *Les cadrans solaires: histoire, théorie, pratique*, Oberlin, Estrasburgo.

Alejandro Gangui

Doctor en astrofísica, Escuela Internacional de Estudios Avanzados (International School for Advanced Studies), Trieste.
Investigador independiente, Conicet.
Profesor, FCEYN, UBA.
Miembro del Centro de Formación e Investigación en la Enseñanza de las Ciencias, FCEYN, UBA.
gangui@df.uba.ar
cms.iafe.uba.ar/gangui