.

III GUIA DE COSMOLOGIA – 2do Cuatrimestre 2003

Curso de postgrado u optativo de grado – Dept de Física, FCEyN-UBA

MODELOS DE FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER

–Entrega: 5 problemas a elección (viernes 26 de septiembre), el resto al final del curso– [1]

Problema 1: (a) La expansión del universo en los modelos cosmológicos simples está descripta por una única función dependiente del tiempo $a(t)$ llamada el factor de escala (N.B.: *no* es el radio del universo; por qué?). Considere que esta función está dada por $a(t) \propto t^p$, con $p > 0$ constante cualquiera. Muestre que el parámetro de desaceleración $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ es constante y que además $q \gtrless 0$ según sea $p \lessgtr 1$.
(b) Para qué valor de p la edad del universo t_{U} coincide con H^{-1} (no sólo para la época presente)? Qué tipo de expansión resulta? Qué nombre le han dado los cosmólogos?
(c) Aunque parezca anti-intuitivo, un universo con $a(t) \propto t^{2/3}$ *no* se expande más rápido que uno con $a(t) \propto t^{1/2}$. Explique, por qué?

Problema 2: Demostrar que si una geodésica temporal de la métrica de Robertson–Walker tiene una velocidad $\vec{v}_1$ en un instante t_1 respecto del sistema de coordenadas comoviente, tendrá una velocidad $\vec{v}_2$ en un instante t_2 tal que $|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|\gamma_1 R(t_1)/\gamma_2 R(t_2)$, donde $\gamma^2 = (1 - |\vec{v}|^2)^{-1}$ y $|\vec{v}|^2 = -g_{ij}v^i v^j$, $i, j = 1, 2, 3$. Mostrar que en el límite $v \to c$ se obtiene la fórmula del corrimiento al rojo para un fotón.

Problema 3: (a) Calcular la expresión analítica de la edad del universo, t_{U}, en el caso general de un modelo de FLRW con materia no–relativista, radiación, constante cosmológica (y curvatura). Resolver numéricamente con los parámetros actuales para cada componente (dados por las últimas observaciones).
(b) Graficar t_{U} (o mejor, $t_{\mathrm{U}}H_0$) en función del valor *actual* de Ω_{M} para un universo plano (esto es, $\Omega_{\mathrm{M}} + \Omega_\Lambda = 1$) y para el caso de un universo sin constante cosmológica, $\Omega_\Lambda = 0$. Interpretar estos resultados.

Problema 4: Calcular la dependencia de la distancia por luminosidad d_{L} hasta un objeto con el corrimiento al rojo z en un universo espacialmente plano dominado por materia no–relativista y energía de vacío (constante cosmológica), es decir con $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. Graficar $d_{\mathrm{L}}(z)$ (o mejor, la magnitud aparente m asociada) en el rango $0 < z < 2$ para $\Omega_M = 0.1, 0.3, 1$ suponiendo que $H_0 = 72$ km/seg/Mpc.

Problema 5: (**D**) Suponiendo una densidad de galaxias por volumen comoviente uniforme n, calcular el número de galaxias que debería observarse por intervalo de corrimiento al rojo z y por unidad de ángulo sólido. (a) Escriba la expresión en el caso general (con todos los componentes conocidos de energía–materia del universo), y (b) grafique el resultado en función de z para el caso de un universo dominado por materia no–relativista (y curvatura arbitraria).

[1] (**D**) = obligatorio para alumnos de doctorado.

Problema 6: (a) Calcular la probabilidad $dP(z)$ de que una galaxia con corrimiento al rojo entre z y $z+dz$ intersecte la línea de mira a una fuente con corrimiento al rojo z_f. Suponer que la sección eficaz de las galaxias es πr_g^2 con $r_g = 10h^{-1}$ kpc, y que el número de galaxias con corrimiento al rojo entre z y $z+dz$ por unidad de volumen propio es $n(z) = n_0(1+z)^3$ con $n_0 = 0.02\ h^3\ \mathrm{Mpc}^{-3}$.
(b) Calcular la profundidad óptica debida a galaxias para una fuente con corrimiento al rojo z_f, definida como $\tau(z_f) = \int_0^{z_f} dP(z)$, en un universo dominado por materia no–relativista y espacialmente plano. Calcular la fracción del cielo cubierta por galaxias en $z_f = 1$. Para qué valor de z_f es la profundidad óptica igual a la unidad?

Problema 7: (a) Calcular el tamaño angular aparente de un objeto de diámetro propio ℓ visto con un corrimiento al rojo z en el caso general (con radiación, materia no–relativista, energía de vacio y curvatura).
(b) Cuál es el ángulo que subtiende una región que era del tamaño del horizonte en el momento del desacople? Estime su valor numérico en un universo espacialmente plano con sólo materia no–relativista. Estime la dependencia de este ángulo con el valor actual de Ω_{M} si éste último es ligeramente distinto de 1.

Problema 8: (**D**) (a) Mostrar que no existe ninguna solución isótropa, homogénea y estática de las ecuaciones de Einstein que tenga como fuente a ningún fluido perfecto físicamente razonable.
(b) Comparar esto con el caso newtoniano. Esto es, qué tipo de fuerza debería agregar a la fuerza de Newton para obtener un volumen de materia (un universo) estático?. Además, cómo queda la ecuación de Poisson (para el "potencial gravitatorio" total) en este caso? Justifique.